4-1. مقدمه

در بسیاری از مسائل روزانه باید در رد یا قبول یک عبارت در مورد برخی پارامترهای جامعه تصمیم‌گیری بعمل آید. برای مثال، آیا میانگین طول عمر یک واحد الکترونیکی برابر 200 ساعت است؟ آیا میانگین محصول یک نوع بذر اصلاح شده از نوع اصلاح نشده بیشتر است؟ آیا دقت یک نوع ماشین تراش از نوع دیگر کمتر است؟ آیا نسبت خرابی یک محصول برابر مقدار مشخصی است؟ آیا میانگین شویندگی یک ماده شوینده در ازای استفاده از مواد اولیه مختلف یکسان است؟ آیا توزیع عمر یک قطعه در دستگاه تراش از توزیع نمایی تبعیت می کند؟ آیا نوع گروه خونی و نژاد به هم بستگی دارند؟

4-2. فرضیه آماری

فرض یا بیان یا حدسی در باره توزیع جامعه یا پارامترهای جامعه را فرض آماری گویند. اگر این فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند آنرا فرض ساده در غیر اینصورت آنرا فرض مرگ گویند. برای مثال، توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 و انحراف معیار 15 است، یک فرضیه ساده و توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 ، است، یک فرضیه مرکب است.

فرضیه صفر و مقابل: فرضیه های اصلی، محقق معمولا دقیق و صحیح نیستند. برای مثال در فرضیه "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب بیشتر است"، میزان فزونی محصول نوع الف از ب مشخص نیست و در عمل نمی توان حدی برای آن تعیین کرد و همه این موارد را رد یا تایید کرد.

مشاهده می شود فرضیه اصلی را نمی توان به صورت مستقیم آزمون کرد. اما از نظر منطقی می توان فرضیه های با اجزای مشخصی تعریف کرد و رد و یا پذیرش فرضیه اصلی را منوط به قبول و یا رد چنین فرضیه هایی نمود. در مورد مثال بالا فرضیه مزبور به صورت "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب برابر است" تعریف می شود. چنین فرضیه هایی را فرض صفرNull Hypothesis می نامند زیرا منجر به خنثی کردن Nullify فرضیه های اصلی می شوند. با این وصف فرضیه اصلی را فرضیه مقابل Alternate Hypothesis نامیده می شود.

مرسوم است که بسیاری از محققین، فرضیه هایی را که به باور آنها نادرست به عنوان فرض صفر در نظر می گیرند به امید اینکه، روشهای آماری به رد آنها بینجامد. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم که میانگین طول عمر باطری کارخانه الف از کارخانه ب بیشتر است، فرضیه صفر به این صورت فرمول بندی می شود که تفاوتی بین طول عمر باطری دو کارخانه نیست.

فرضیه صفر با H_0 و فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می گیرد را با H_1 نشان داده می شود.

4-3. انواع فرضیه

1- فرضیه (آزمون) دو طرفه (دو دامنه): آزمون فرض را دو طرفه گوئیم، اگر فرض مقابل دو طرفه باشد بعبارت دیگر آزمون بصورت زیر باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

2-فرضیه (آزمون) یکطرفه: (یک دامنه):آزمون فرض را یکطرفه می نامیم اگر فرض مقابل آن

یکطرفه باشد. بعبارت دیگر آزمون به یکی از دو صورت زیر باشد:

الف:
$$\begin{cases} H_0 : \theta \le \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

ب-
$$\begin{cases} H_0 : \theta \ge \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

4-4. طریقه ساختن فرضیه صفر و مقابل

برای نشان دادن چگونگی ساختن فرضیه صفر و مقابل به مثال های ذیل توجه نمایید.

مثال1. تصور کنیدکه ارتش، پوتین های مورد نیاز خود را از یک تولید کننده خاص، تامین می کند که میانگین عمر پوتین های تولیدی وی 12 ماه است. یک تولید کننده جدید، ادعا می کند که پوتین هایی با میانگین عمر بیش از 12 ماه با همان قیمت ارائه می دهد. برای اثبات این مدعی، آزمایشی ترتیب داده می شود. با استفاده از نمادهای آزمون فرض، فرضیه صفر و مقابل را می توان به یکی از دو صورت ذیل فرموله کرد.

1)
$$\begin{cases} H_0 : \mu \le 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} H_0 : \mu \ge 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases}$$

در حالت اول، $\begin{cases} H_0 : \mu \le 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases}$ ، پذیرش فرضیه صفر، به معنای ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی، و رد آن به معنی شروع همکاری باشرکت جدید است. اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید 12 ماه یا کمتر باشد، احتمال ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی نزدیک به یک است. از سوی دیگر، اگر میانگین عمر پوتین ها مقدار جزئی از 12 ماه بیشتر باشد هنوز احتمال حفظ تولید کننده قدیمی کاملاً زیاد است. اگر میانگین عمر پوتین ها بطور قابل توجهی از 12 ماه بیشتر باشد، احتمال شروع همکاری با تولید کننده فزونی می یابد.

این فرموله بندی زمانی مطرح می شود که ارتش از تولید کننده داخلی بسیار راضی است. شرکت قدیمی کالای مطمئن و با کیفیت و همچنین به موقع ارسال می کند و تغییر به شرکت جدید باعث بروز مشکلات اداری خواهد شد. در این حالت، شرکت جدید موظف است تا نشان دهد پوتینهایش دارای میانگین عمری بسیار بزرگتر از 12 ماه هستند. ارتش تنها در شرایطی مشتاق تغییر به شرکت جدید است که در میانگین عمر افزایشی عمده پدید آید.

در حالت دوم، $\begin{cases} H_0 : \mu \ge 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases}$، پذیرش فرضیه صفر، با خرید از شرکت جدید مترادف است و رد آن به معنای حفظ تولید کننده قدیمی است. اگر میانگین عمر پوتینهای شرکت جدید 12 ماه یا بیشتر باشد احتمال شروع همکاری با تولید کننده جدید نزدیک به یک است. همچنین، اگر میانگین عمر پوتین ها بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر باشد احتمال حفظ تولید کننده قدیمی فزونی می یابد.

حالت دوم در زمانی مطرح می شود که ارتش از تولید کننده فعلی ناخشنود است. در این حالت، نه تنها، اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید بیشتر از 12 ماه باشد، بلکه حتی اگر میانگین عمر به مقدار جزئی کمتر از 12 ماه باشد، تولید کننده قدیمی کنار گذاشته می شود. در این صورت، تولید کننده جدید کافی است، نشان دهد میانگین عمر پوتین هایش بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر نیست.

مثال2. یک تولید کننده لامپ روشنایی ادعا کرده که میانگین عمر کالای او از 1000 ساعت بیشتر است. در صورت سختگیری نسبت به ادعای مزبور فرضیه صفر و مقابل را فرموله نمایید.

از آنجا که در مورد این ادعا برخورد سختگیرانه ای اتخاذ شده، و باور بر این است که میانگین عمر کالا کمتر از 1000 ساعت است، نحوه فرمولاسیون فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le 1000 \\ H_1 : \mu > 1000 \end{cases}$$

4-5. طریقه تعیین مقدار پارامتر جامعه در فرضیه صفر

1- تجربیات و دانایی های گذشته و یا آزمایشی که در گذشته انجام شده و هدف از آزمون این است که آیا شرایط آزمایش تغییر کرده است.

2- بررسی درستی و نادرستی یک فرضیه

3- طراحی و مشخصات فنی و مهندسی و یا الزامات قراردادی

4-6. فرآیند آزمون فرضیه

پس از فرموله بندی فرضیه صفر و مقابل، باید روشی سیستماتیک مبتنی بر آمار، اتخاذ نمود تا بر اساس آن درستی و نادرستی فرضیه صفر و به تبع فرضیه مقابل معلوم شود. برای این هدف ، می توان مجموعه اعضای جامعه را مطالعه کرد که این کار به سبب نامحدود بودن جامعه و تنگنای زمان و هزینه در عمل ناممکن است. در این صورت ناگزیر از نمونه گیری و تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جامعه است. در واقع رد و یا قبول فرضیه صفر منوط به اطلاعات حاصل از نمونه است.

روش کار به این صورت است که با استفاده از داده های حاصل از نمونه یک شاخص نمونه ای و یا آماره آزمون به عنوان تخمینی از پارامتر جامعه محاسبه می شود، آنگاه مقدار آماره با مقدار پارامتر جامعه بر اساس یک معیار تحت عنوان ناحیه رد مقایسه می شود. ناحیه رد در یک آزمون فرضیه، در واقع به معنای تفاوت آشکار مقدار آماره با مقدار عددی پارامتر است. در صورتی که مقدار آماره در ناحیه رد قرار گیرد فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می شود.

فرض کنید می خواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta \neq \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ برای θ، به θ_0 نزدیک باشد(در داخل ناحیه قبول قرار گیرد) ، فرضیه صفر پذیرفته و در صورتی که $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر و یا کوچکتر از θ_0 باشد(در داخل ناحیه رد قرار گیرد)، فرضیه صفر رد می شود.

به طریق مشابه، در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta < \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ بسیار کوچکتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می شود.

همچنین در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta > \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می شود.

در مورد هریک از حالت‌های بالا، در مورد عبارات بسیار بزرگتر و بسیار کوچکتر مفاهیم ناحیه قبول و ناحیه رد تعریف می شود .

4-6-1. تعریف ناحیه پذیرش و ناحیه بحرانی

ناحیه ای که باعث قبول فرض صفر می شود را ناحیه پذیرش یا ناحیه قبولی و ناحیه ای که باعث رد فرض صفر می شود ناحیه بحرانی یا ناحیه رد گویند. مرز بین این دو ناحیه را مقدار بحرانی گویند. برای تبیین ریاضی ناحیه رد و قبول، از مفاهیم خطاهای آزمون فرض به طریقه ذیل استفاده می شود.

4-6-2. خطای نوع اول (I) و نوع دوم (II)

خطای نوع اول: رد فرض H_0 در صورتی که در واقع درست باشد، خطای نوع اول گفته می شود و آنرا با α نشان می دهند. و بیان ریاضی خطای نوع اول به صورت ذیل است.

$\alpha = p$ (رد فرض H_0 | H_0 درست باشد)

خطای نوع دوم: قبول فرض H_0 در صورتی که در واقع نادرست باشد خطای نوع دوم گفته می شود و با β نشان داده می شود. بیان ریاضی خطای نوع دوم به صورت ذیل است

$\beta = p$ (قبول فرض H_0 | H_0 نادرست باشد)

مثال3. فرض کنید یک نوع کپسول سرماخوردگی A چند سال است که در کشور تولید می شود و ثابت شده است که پس از 5 روز 70 درصد مؤثر است کارخانه ای مدعی است که کپسولی مشابه a به نام B تولید کرده است که اثر آن پس از 5 روز بیشتر از 70 درصد است. می‌خواهیم بررسی کنیم که با توجه به هزینه ای که برای ساخت کپسول B باید صرف شود آیا استفاده از آن بنفع ما است یا خیر؟ برای این منظور یک نمونه 20 تایی از افراد را انتخاب و کپسول B را به آنها داده ایم. اگر در این آزمایش پس از 5 روز تأثیر دارو بر روی کمتر از 16 نفر مؤثر واقع شده باشد ادعای کارخانه B را بی مورد می‌دانیم. مطلوبست محاسبه مقادیر خطای نوع اول و دوم.

$$\begin{cases} H_o : p = 0.7 \\ H_1 : p > 0.7 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\text{ Reject } H_0 \mid H_0 \text{ is True}) = p(x \geq 16 \mid P = 0.7) = \sum_{x=16}^{20} b(x;20,0.7) = 0.2375$$

$$\beta = p(\text{Accept } H_0 \mid H_0 \text{ is False}) = p(x < 16 \mid p > 0.7)$$

ملاحظه می شود که β قابل محاسبه نمی باشد. زیرا فرض مقابل بطور کامل مشخص نشده اما اگر فرض مقابل را تغییر داده و بصورت $H_0 : p = 0.8$ در نظر بگیریم:

$$\beta = p(x < 16 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{15} b(x;20,0.8) 0.3704$$

واضح است که تصمیم گیری خوب وقتی انجام می پذیرد که هر دو نوع خطا کم باشند. بعبارت دیگر نه فرضی را بی دلیل رد و نه فرضی را بی دلیل قبول کنیم. در واقع در شرایط ایده ال، α و

β بطور همزمان کوچک هستند.

مثال: در مثال فوق اگر نقطه بحرانی از 16 به 15 تغییر دهیم. مقادیر α و β را تعیین کنید.

$$\alpha = p(x \geq 15 \mid p = 0.7) = \sum_{x=15}^{20} b(x;20,0.7) = 0.4164$$

$$\beta = p(x < 15 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{14} b(x;20,0.8) = 0.1958$$

ملاحظه می شود که با تعدیل نقطه بحرانی α زیاد و β کم می شود. به عبارت دیگر α و β به یکدیگر وابسته بوده و کاهش یکی باعث افزایش دیگری می شود. پس با تغییر نقطه بحرانی می توان یکی از خطاها را کم و دیگری را زیاد نمود.

مثال4. در مثال قبل اگر یک نمونه 100 تایی انتخاب و نقطه بحرانی را عدد 74 اختیار کنیم، مقادیر α و β را محاسبه کنید.

$$\alpha = p(x \geq 74 \mid p = 0.7) = p\left(z > \frac{73.5 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) = p(z > 0.76) = 0.2236$$

$$\beta = p(x < 74 \mid p = 0.8) = p\left(z > \frac{74.5 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) = p(z < -1.375) = 0.085$$

بنابراین با افزایش حجم نمونه هر دو خطا بطور همزمان کاهش می یابد.

نتیجه: خطای نوع اول و دوم به یکدیگر وابسته بوده و افزایش یکی باعث کاهش دیگری می شود. با افزایش حجم نمونه می توان هر دو خطا را بطور همزمان کاهش داد. (هرچه n زیاد شود α کم می شود و در صورتیکه α ثابت باشد β کم می شود)

مثال5. فرض کنید گزارش رسیده که میانگین قد دانشجویان یک دانشگاه 170 cm و انحراف معیار آن 9cm است. برای آزمایش آن یک نمونه تصادفی 36 تایی انتخاب و ناحیه پذیرش را بین 167/5 و 172/5 در نظر می گیریم. مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\overline{x} > 172.5 \mid \mu = 170) + p(\overline{x} < 167.5 \mid \mu = 170) =$$

$$p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9/\sqrt{36}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9/\sqrt{36}}\right) = 0.97$$

برای اینکه آزمون خوبی داشته باشیم باید خطای نوع دوم را نیز محاسبه کنیم. اما در حالی که فرض مقابل بصورت $H_0 : \mu \neq 170$ باشد، محاسبه β امکان پذیر نیست. ولی با انتخاب مقادیر مختلف برای μ می توان β را محاسبه نمود تا تضمین کافی در مورد رد فرض صفر بدست آید.

مثلاً $H_1 : \mu = 175$

$$\beta = p(167.5 < \overline{x} < 172.5 \mid \mu = 175) = .097$$

بنابراین 9/7% از تمام نمونه های تصادفی که با حجم n=36 انتخاب می شوند باعث رد فرض H_0 می‌شوند.

مثال 6. در مثال قبل اگر حجم نمونه را 64 انتخاب کنیم مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 \mid \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5)\mu = 170$$

$$= p\left(z > \frac{172.5-170}{9/\sqrt{64}}\right) + p\left(z < \frac{167.5-170}{9/\sqrt{64}}\right) = 0.0264$$

$$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 \mid \mu - 175) = p\left(\frac{167.5175}{9/\sqrt{64}} < x < \frac{172.5-175}{9/\sqrt{64}}\right)$$

$$= p(-6.66 < z < -2.22) = 0.0132$$

3-6-4. طریقه تعیین ناحیه بحرانی

با توجه به تعاریف خطای نوع اول و دوم برای تعیین اندازه ناحیه رد (بحرانی)، از ارتکاب به خطای نوع اول یعنی α استفاده می شود. در واقع، در توزیع نمونه ای $\hat{\theta}$، احتمال مشاهده مقادیر در ناحیه بحرانی برابر α است . از آنجایی که معمولا α عدد کوچکی انتخاب می شود مفهوم "تفاوت آشکار $\hat{\theta}$ و θ_0" معنا می شود. به این معنی که مقادیری که در ناحیه بحرانی مشاهده می شوند بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از پارامتر جامعه هستند.

در نتیجه ، اگر آماره‌ای که بر اساس آن تصمیم گیری می شود، دارای توزیع پیوسته باشد می توان ابتدا خطای نوع اول را اختیار کرد و به کمک آن ناحیه بحرانی را تعیین نمود. به اندازه ناحیه بحرانی سطح معنادار‌بودن گفته می شود.

مثال 7. فرض کنید می‌خواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعه نرمال با واریانس σ^2 ، برابر μ_0 است، $H_0 : \mu = \mu_0$، در برابر فرض مقابل $H_1 : \mu > \mu_0$، آزمون کنیم. مقدار k را طوری تعیین کنید که $\bar{x} > k$ یک ناحیه بحرانی به اندازه α=0,05 برای نمونه تصادفی به اندازه n باشد.

$$z_{0.05} = 1.645$$

$$Z_{0.05} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$1.645 = \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$k = \mu_0 + \frac{1.645}{\sigma/\sqrt{n}}$$

در این صورت ناحیه بحرانی به اندازه α=0,05 عبارت است از $\bar{x} > \mu_0 + 1.645\sigma/\sqrt{n}$ و یا به عبارت ساده تر $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{0.05}$ است . در این صورت به Z آماره آزمون گویند.

با بدست آوردن ناحیه فوق، پس از نمونه گیری اگر میانگین نمونه و یا آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می شود.

4-6-4. ارتباط بین فاصله اطمینان و آزمون فرض

اگر $[L\ U]$ یک فاصله اطمینان در سطح $100(1-\alpha)\%$ باشد، در آزمون فرضیه $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$، فرضیه صفر رد می شود اگر و فقط اگر θ_0 به این فاصله متعلق نباشد.

5-6-4. مراحل آزمون فرض

- فرموله کردن فرضیه صفر و مقابل
- تعیین اندازه ناحیه بحرانی و یا سطح معنادار بودن
- انتخاب آماره آزمون و محاسبه آن
- تعیین مقدار بحرانی از روی جدول و با توجه به سطح معناداری
- مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت رد قبول می شود. در در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت اصطلاحاً گفته می شود که فرضیه صفر در سطح معناداری α، معنادار نیست.

7-4. آزمون فرضیه برابری میانگین یک جامعه با یک مقدار معین

1-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض معلوم بودن واریانس جامعه

فرض کنید می‌خواهیم با فرض معلوم بودن واریانس جامعه، σ^2 ، فرض برابری میانگین جامعه نرمال،μ ، با یک مقدار معین را در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. بیان ریاضی آزمون به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

فرض کنید $x_1,\ldots,x_n$ ، یک نمونه تصادفی به حجم n ، از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

که دارای توزیع نرمال استاندارد است، به عنوان آماره آزمون استقاده می‌شود. اگر مقداری که توسط آماره آزمون به دست می آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 را پذیرفته و در غیر این صورت H رد می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \left[-Z_{\alpha/2} \quad -Z_{\alpha/2}\right]$$

$$\begin{cases} H_0 = \mu = \mu_0 \\ H_1 = \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \left]-\infty\ Z_{\alpha}\right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \left[-Z_{\alpha} \quad \infty\right[$$

مثال8. ضروری است که میانگین مقاومت پارگی تارهای یک نوع پارچه از $\mu = 180psi$ کمتر نباشد. بر اساس تجارب گذشته، انحراف معیار مقاومت پارگی تارها، 4psi است. مجموعه ای مرکب از یک انباشته از این پارچه از فروشنده دریافت می شود و از سه قطعه نمونه برداری می شود. این نمونه ها که تقریباً توزیع نرمال دارند آزمایش شده و نتایج زیر به دست آمده:

قطعه اول: 182 psi　　قطعه دوم: 172 psi　　قطعه سوم: 177 psi

در سطح $\alpha = 0{,}05$، نتیجه آزمون فرضیه ذیل چه خواهد بود.

$$\begin{cases} H_0: \mu \ge 180 \\ H_1: \mu < 180 \end{cases}$$ ناحیه پذیرش = $[-1.64\ \infty)$

$$\bar{x} = 177$$

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{177-180}{4/\sqrt{3}} = -1.3$$

بنابراین فرضیه صفر قبول می‌شود.

مثال9. در بررسی آماری که در گذشته انجام شده است، قد افراد دارای متوسط 68/5 اینچ با انحراف معیار 2/7 اینچ گزارش شده است. برای تایید یا رد این ادعا، اگر یک نمونه 50 تایی از افراد دارای متوسط قد 69/7 اینچ باشد آیا دلیلی برای تصور تغییر در قد متوسط قد وجود دارد؟ (سزح معنا دار بودن $\alpha = 0{,}02$)

$$\begin{cases} H_0: \mu = 68.5 \\ H_1: \mu \ne 68.5 \end{cases} \qquad Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{69.7-68.5}{2.7/\sqrt{50}} = 3.143$$

ناحیه پذیرش : $(-\infty\ \ Z_\alpha] = (-\infty\ , 2.06]$

بنابراین، H_0 رد می شود.

مثال10. یک شرکت باربری نسبت به ادعای تولیدکننده یک نوع لاستیک خودرو، مبنی بر اینکه طول عمر متوسط آنها حداقل برابر با 28000 مایل است، مظنون می‌باشد. برای بررسی این ادعا، شرکت 40 حلقه از این لاستیک ها را در ماشین ها استفاده می کند. طول عمر متوسط 40 حلقه مزبور، 27463 مایل با انحراف معیار 1348 مایل بوده است. اگر خطای نوع اول 1% باشد، شرکت چه تصمیمی می تواند اتخاذ کند؟

$$\begin{cases} H_0: \mu \ge 28000 \\ H_1: \mu < 28000 \end{cases} \qquad n = 40 > 30 \Rightarrow \sigma \approx S$$

$$\alpha \le \%1$$

ناحیه پذیرش : $[-Z_\alpha, \infty) = [-Z_{\%1}, \infty) = [-2.43, \infty)$

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{27463-28000}{1348/\sqrt{40}} = -2.52$$

بنابراین، H_0 رد می شود.

2-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض مجهول بودن واریانس جامعه

فرض کنید می‌خواهیم با فرض مجهول بودن واریانس جامعه، σ^2 ، فرض برابری میانگین جامعه نرمال،μ ، با یک مقدار معین را در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. بیان ریاضی آزمون به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

فرض کنید $x_1,\dots,x_n$ ، یک نمونه تصادفی به حجم n ، از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس مجهول σ^2 باشد برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

به عنوان آماره آزمون استفاده می شود که دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

اگر مقدار آماره در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته می شود و در غیر این صورت H_0 رد می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \left[-t_{\alpha/2,\, n-1} \quad -t_{\alpha/2,\, n-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \left] -\infty ,\, t_{\alpha, n-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \left[-t_{\alpha, n-1} ,\, \infty \right[$$

مثال11. در روش متداول استحصال بنزین از نفت، میانگین استحصال 26 واحد است. اخیراً روش تازه‌ای ابداع شده است که در ذیل آن ادعا می شود که بازده روش ابداعی از 26 واحد بیشتر است.

الف)فرض صفر و فرض یک را بنویسید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 26 \\ H_1 : \mu > 26 \end{cases}$$

ب)اگر نمونه تصادفی 9 تایی بگیریم و نتایج $S=2$ و $\bar{x}=28$ به دست آمده است. با فرض خطای نوع اول در سطح 1%، در مورد روش جدید چه می‌توان گفت؟

$$t_8 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{28 - 26}{2.2} = 3$$

ناحیه پذیرش $= \left(-\infty, t_{0.01,8}\right) = \left(-\infty, 2.896\right)$

بنابراین، H_0 رد می شود.

8-4. آزمون فرضیه برابری واریانس جامعه نرمال با یک مقدار خاص

فرض کنید $x_1,...,x_n$ نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد. می خواهیم فرض های ذیل را آزمون کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

که در آن σ_0^2 مقدار معلومی است. برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

که دارای توزیع مربع کای با n-1 درجه آزادی، به عنوان آماره آزمون استفاده می کنیم. اگر مقداری که توسط آماره آزمون به دست می آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته می شود و در غیر این صورت H_0 رد می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \left[\chi^2_{1-\alpha,n-1}, \infty\right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \left[0\ ,\ \chi^2_{\alpha\ ,n-1}\right]$$

مثال12. در یک نمونه تصادفی، زمانی که 30 زن برای جواب دادن به سوالات امتحان صرف کردند، دارای واریانس 6/4 دقیقه بوده است. با فرض اینکه جامعه منظور نرمال باشد، فرض $H_0:\sigma = 8$ را در برابر فرض $H_0:\sigma < 8$ در سطح α=0/05 آزمون کنید.

n =30 ، S =6/4 ،α=0/05 ،$\sigma_0^2 = 8^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{29\times(6.4)^2}{8^2} = 18.56$$

$\chi^2 \leq \chi^1_{n-1,1-\alpha} = \chi^2_{29,0.95} = 17.7$ H_0 ناحیه رد

بنابراین، نمی توان H_0 را رد کرد.

9-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو جامعه

1-9-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو توزیع نرمال زمانی که هر دو انحراف معیار معلوم باشند.

فرض کنید $x_1,...,x_{n_x}$ و $x_1,...,x_{n_y}$ دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال با میانگین های مجهول μ_x و واریانس مجهول σ_x^2 و σ_y^2 باشد. برای آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

با استفاده از آماره آزمون ذیل

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_x^2}{n_y}}}$$

زمانی که آماره آزمون در ناحیه پذیرش قرار گیرد، فرضیه صفر قبول و در غیر ایـن صـورت رد مـی-شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \left[-Z_{\alpha/2} \quad Z_{\alpha/2}\right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases} \qquad [-Z_\alpha \ \infty)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases} \qquad (-\infty \ Z_\alpha]$$

مثال13. در تحقیقات مربوط به انواع سوخت موشک که با هدف تقلیل زمان تأخیر بین لحظه آغاز شلیک و لحظه انفجار صورت می گیرد، تصور بر این است که جانشین کردن سوخت متداول با سوخت جدید می تواند تأثیر مثبتی داشته باشد. انحراف معیار نظیر سوخت متداول و سوخت جدید مساوی 0/04 است. قرار است در خلال یک تجربه، n موشک را با سوخت متداول و n موشک را با سوخت جدید شلیک کنیم. اگر در اثر استفاده از سوخت جدید زمان تأخیر به میزان 0/07 کاهش یابد، استفاده از سوخت جدید قابل توصیه خواهد بود. اگر بر اساس نمونه های n =32 تایی مقادیر 0/261 ثانیه و 0/251 ثانیه برای متوسط زمان تأخیر به ترتیب سوخت متداول و سوخت جدید به دست آید، در سطح خطای نوع اول 5 درصد آیا سوخت جدید را توصیه می کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x - \mu_y = 0.07 \\ H_1 : \mu_x - \mu_y < 0.07 \end{cases}$$

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_x^2}{n_y}}} = \frac{(0.261 - 0.251) - 0.07}{\sqrt{(\frac{0.04^2}{32} + \frac{0.04^2}{32})}} = \frac{0.03}{0.01} = 3$$

$$\text{Acceptance Region} = (-\infty, 1.645]$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود.

2-9-4.آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و مساوی

فرض کنید x_1, x_2, x_{n_x} و $y_1, y_2, ..., y_{n_g}$ نمونه های مستقل از جامعه های نرمال با پارامترهای (μ_x, σ_x^2) و (μ_y, σ_y^2) باشند و فرض می کنیم تمام چهار پارامتر مجهولند. می خواهیم فرض صفر $H_0 = \mu_x = \mu_y$ را در مقابل فرض $H_1 = \mu_x \neq \mu_y$ آزمون کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

فرض می کنیم واریانس های مجهول σ_x^2 و σ_y^2 مساوی و برابر مقدار مشترک σ^2 است،یعنی:

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$

آماره آزمون برابر:

$$t_{n_x+n_y-2} = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}}}$$

وقتی H_0 درست است، یعنی $\mu_x - \mu_y = 0$ آماره آزمون بصورت زیر تعریف می شود:

$$t_{n_x+n_y-2} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}}}$$

اگر مقداری که توسط آماره آزمون بدست می آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته و در غیر این صورت رد می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases} \quad \left[-t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2} \quad t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2}\right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases} \quad \left[-t_{\alpha, n_x+n_y-2} \; \infty\right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases} \quad \left[-\infty \;\; t_{\alpha, n_x+n_y-2}\right]$$

مثال14. از 8 موشک کوتاه بود از یک نوع دارای میانگین خطای اصابت $\bar{x}_1 = 98$ فوت با انحراف معیار s_1=18 فوت و 10 موشک کوتاه بود از نوع دیگر دارای میانگین خطای اصابت $\bar{x}_c = 76$ فوت با انحراف معیار $s_2 = 15$ فوت باشد. فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = 15$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 > 15$ آزمون کنید. اندازه ناحیه بحرانی را $\alpha = \%5$ بگیرید. و فرض کنید که جامعه ها نرمال و دارای واریانس های یکسان اند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 15 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 15 \end{cases}$$

$$= \left(-\infty; t_{\alpha,n_1+n_2-2}\right] = \left(-\infty, t_{0.05,16}\right] = \left(-\infty, 1.746\right]$$

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

$$t_{16} = \frac{(97-96)-(15)}{\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{7\times 18^2 + 9\times 15^2}{16}}} = 0.9$$

فرض H_0 رد نمی شود (نمی توان H_0 را رد کرد)

10-4. آزمون برابری واریانس های دو جامعه

فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_{n_c}, y_1, y_2, ..., y_{n_y}$ نمونه هایی مستقل از دوجامعه نرمال با پارامترهای مجهول (μ_x, σ_x^2) و (μ_y, σ_y^2) باشند. می خواهیم فرض صفر $H_0 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ را در مقابل فرض $H_1 = \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ آزمون کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases}$$

آماره آزمون بصورت زیر است:

$$F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{s^2 x}{s_y^2} \times \frac{s_y^2}{s_x^2}$$

وقتی H_0 درست است داریم:

$$F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{s_x^2}{s_y^2}$$

اگر مقداری که آماره آزمون بدست می دهد در ناحیه پذیرش بود فرض صفر را می پذیریم و در غیر این صورت رد می کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases} \quad F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \quad F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2 \end{cases} \quad \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \quad \infty \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \end{cases} \quad \left(0 \quad F_{\alpha; n_x-1, n_y-1} \right]$$

مثال15. مقدار موم موجود در دو طرف پاکت های مومی یک متغیر تصادفی است. شواهدی مبنی بر بیشتر بودن موم سطح داخلی پاکت وجود دارد. مقدار موم سطح داخلی و خارجی را متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای مجهول بگیرید. مقدار موم موجود بر سطح داخلی و خارجی نمونه های تصادفی 75 تایی گرفته شده نتایج ذیل بدست آمده است:

سطح خارجی	سطح داخلی
$\bar{x} = 0.948$	$\bar{y} = 0.652$
$\sum y_i^2 = 91$	$\sum y_i^2 = 84$

به ازای α=%1 فرض بیشتر بودن پراکندگی سطح داخلی را آزمون کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \end{cases}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1} = \frac{91 - 75(0.948)^2}{74} = 0.318881$$

$$s_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2}{n-1} = \frac{84 - 75(0.652)^2}{74} = 0.704286$$

$F_{74,74}=\frac{0.318881}{0.704286}=0.452772$

ناحیه پذیرش ; $\left[0, F_{\%1,74,74}\right]=\left[0,1.7676\right]$

H_0 رد نمی شود.

مثال16. مفروضات زیر در رابطه با زمان نمایش فیلم های تهیه شده توسط 2 شرکت می باشد. فرضیه $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ را در برابر $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ در سطح 0/1 تست کنید.

زمان برحسب دقیقه

شرکت 1	102	86	98	109	92		
شرکت 2	81	165	97	134	92	87	114

ناحیه پذیرش : $\left[F_{1-\frac{\alpha}{2},4,6}, F_{\frac{\alpha}{2},4,6}\right]=\left[0.163,4.53\right]$

$F_{20,24}=\frac{70}{48}=1.458\quad F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{8.877}{30.22}=0.0863$

بنابراین H_0 رد می شود.

4-11. آزمون مشاهدات زوجی

یک مورد خاص و مهم وقتی مطرح می شود که مشاهدات به صورت ذوبی تهیه شده و هر زوج تحت شرایط تجربی یکسان بدست آید بطوریکه شرایط ازیک زوج به زوج دیگر تغییر کنند.

روش آزمایش به تفاوت بین هر زوج از مشاهدات مربوط می شود. فرض کنید $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ مجموعه از n زوج متغیر تصادفی باشدکه به ترتیب، معرف مقادیر قابل سنجش نظیر آزمایش $1,\ldots,n$ هستند. تفاوت های موجود بین هر زوج مشاهده را بترتیب به صورت $D_{1n}=x_1-y_1,\ldots, D_n=x_n-y_n$ به دست آورید. چنین فرض می شود که این تفاوتها متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال هر یک با میانگین مشترک و مجهول μ_D و انحراف معیار مشترک و مجهول σ_D است.

احتمال دارد به خاطر تغییر شرایط تجربی از یک زوج به زوج دیگر، μ_D از زوجی به زوج دیگر یکسان باشد حتی اگر میانگین های x ها و yها از هم متفاوت باشند. انحراف معیار σ_D، گرچه مجهول است اما به σ_x^2وσ_y^2 بستگی دارد . بدون اینکهσ_x و σ_y لزوماً با هم مساوی باشند. اگر x و y مستقل باشند در اینصورت $\sigma_D=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$ است.

با این فرض ها، آشکار است که آزمون برابری میانگین ها معادل آزمون فرض $\mu_D=0$ است وقتی که انحراف معیار σ_D مجهول باشد، آماره آزمون بصورت ذیل است:

$$t_{(n-1)}=\frac{\overline{D}}{S_D\sqrt{n}}$$

که در آن داریم:

$$\overline{D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}D_i}{n}\qquad,\qquad s_D=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i-\overline{D}\right)^2}{n-1}}$$

$$\begin{cases}H_0:\mu_D=0\\ H_1:\mu_D\neq 0\end{cases}$$

مثال17. تجربه ای مبتنی بر مقایسه خوردگی لوله با دو نوع پوشش بصورت زیر انجام شده است. قرار است به منظور بررسی میزان خوردگی نمونه برداری های زوجی انجام شده و طی آن یک نمونه از هر پوشش در هر زوج شرکت داده شود و هر زوج در یک نوع خاک، در عمق یکسان، با موقعیتی مشابه و برای مدتی یکسان دفن شود. از دیدگاه علمی، کشف یک تفاوت 11% اینچی در میانگین عمق بزرگترین حفره های هر پوشش با احتمال بزرگتر یا مساوی بودن با 0/95 مهم شمرده می-شود. قرار است آزمون به ازای α=%5 اجرا شود. براساس تجارب گذشته می دانیم که انحراف معیار عمیق بزرگترین حفره برای پوشش های مشابه مقدار تقریبی 0/008 اینچ را دارد. نتایج 15 نمونه به شرح زیر است:

پوشش A	پوشش B	تفاوت
65	40	25
75	68	7
73	51	22
43	41	2
53	41	12
58	47	11
47	32	15
52	24	28
38	43	-5
61	53	8
56	52	4
56	57	-1
34	44	-10

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{(0.008)^2 + (0.008)^2} = \%113$$

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} = \frac{120}{15} = 8$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{121.571}$$

$$t_{14} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{121.571}} = 2.81$$

$$t_{0.025,14} = 2.145$$

بین دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی تفاوت قابل توجه ای وجود دارد.

12-4. آزمون نسبت

فرض کنید p احتمال موفقیت در هر مرحله آزمایش دو جمله ای آزمایش دو جمله ای است و فرض کنید در یک جامعه دو جمله ای می خواهیم آزمونی را به یکی از صورت های زیر بررسی کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

P_0 نسبت موفقیت در آزمایش بینم است.

می دانیم که آماره مناسب برای P که تصمیم گیری بر اساس آن صورت می گیرد آماره $\hat{p} = \frac{x}{n}$ است که دارای توزیع دو جمله ای است.

از طرفی هرگاه n بزرگ باشد احتمالات مربوط به دو جمله ای را نمی توان مستقیماً از جدول دو جمله ای محاسبه نمود و از تقریب دوجمله ای به توسط پواسون یا نرمال استفاده می کنیم که اگر p خیلی به صفر یا یک نزدیک نباشد از توزیع نرمال استفاده می شود لذا برای تعیین ناحیه بحرانی دو حالت در نظر می گیریم.

الف- اگر n کوچک باشد، چون توزیع P دو جمله ای است برای تشکیل ناحیه بحرانی ابتدا نقطه ای دلخواه را بعنوان نقطه بحرانی اختیار کرده و به کمک آن α را محاسبه می کنیم. یکی از نقاط بحرانی که مورد استفاده قرار می گیرد نقطه x تعداد موفقیت ها در نمونه منتخب، است. چون میانگین $\mu = np_0$ است، بنابراین مقادیری از x که فاصله زیادی با $\mu = np_0$ داشته باشد باعث رد فرض صفر خواهد شد. در نتیجه برای آزمون فرضی به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$ با استفاده ازتوزیع دو جمله ای $b(x,n,p_0)$ مقدار احتمال $\alpha_1 = p(x \leq x \mid H_0 \text{ is True})$ که در آن x تعداد موفقیت ها در نمونه به حجم n باشد را محاسبه کرده و در صورتیکه α_1 کمتر از α(سطح تشخیص انتخاب شده) باشد، فرض صفر را رد می کنیم. به همین ترتیب برای آزمونی به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$ با استفاده از توزیع دو جمله ای $b(x,n,p_0)$ مقدار احتمال زیررا بدست می آوریم:

$$\alpha_1 = p(x \leq x \mid p = p_0) \qquad \text{if } x < np_0$$
$$\alpha_1 = p(x > x \mid p = p_0) \qquad \text{if } x > np_0$$

اگر $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$ باشد. فرض صفر را رد می کنیم.

بطور کلی مطالب بالا را به صورت 6 مرحله زیر می توان خلاصه کرد:

آزمون فرض برای p، هنگامی که n کوچک باشد.

1)تشکیل فرض صفر $H_0:p=p_0$

2)تشکیل فرض مقابل $p \neq p_0$ یا $p > p_0$ یا $H_1 : p < p_0$

3)انتخاب α

4)ناحیه بحرانی:

الف) اگر فرض مقابل $p < p_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \le x \mid p = p_0) < \alpha$$

ب) اگر فرض مقابل $p > p_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \ge x \mid p = p_0) < \alpha$$

ج) اگر فرض مقابل $p \ne p_0$ باشد، اگر $x<np_0$ تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \le x \mid p = p_0) < \frac{\alpha}{2}$$

و اگر $x>np_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه

$$p(x \ge x \mid p = p_0) < \frac{\alpha}{2}$$

5) محاسبات: به کمک نمونه منتخب با حجم n به مقدار x را تعیین و احتمال لازم در ناحیه بحرانی را محاسبه می کنیم.

6)نتیجه گیری: اگر x در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض صفر را رد می کنیم.

مثال18. بازیکنی مدعی است که 60% از توپ هایی که پرتاب می کند وارد سبد می شوند از 15 توپی که پرتاب کرده 10 توپ وارد سبد شده است. آیا می توان این ادعا را پذیرفت؟ α=%5

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.6 \\ H_1 : p \ne 0.6 \end{cases}$$

$$\alpha = \%5 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \%25$$

$$\mu = np_0 = q$$

$$x = 10 \Rightarrow x > np_0$$

ناحیه بحرانی $p(x \ge x \mid p = 0.6) < 0.025$

$$p(x \ge 10 \mid p = 0.6) = 1 - p(x < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \mathrm{bin}(x,15,0.6) = 1 - 0.5968 = 0.4032$$

$0.4032 > 0.025 \Rightarrow$ فرض H_0 را رد نمی کنیم

ب- اگر n نسبتاً بزرگ باشد، بنا به قضیه حد مرکزی، $\hat{p} = \frac{x}{n}$ تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = p_0, \sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ می باشد و در نتیجه تصمیم گیری بر اساس آماره زیر خواهد بود:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$$

بنابراین اگر فرض مقابل:

$H_1: p<p_0$ باشد، ناحیه بحرانی $z < -z_\alpha$ و ناحیه پذیرش $[-z_\alpha \infty)$

$H_1: p>p_0$ باشد، ناحیه بحرانی $z > -z_\alpha$ و ناحیه پذیرش $(-\infty, z_\alpha]$

$H_1: p \neq p_0$ باشد، ناحیه بحرانی و $z < z_{\frac{\alpha}{2}}$ ناحیه پذیرش $\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ خواهد بود.

مطالب بالا را در 6 مرحله زیر می توان خلاصه کرد.

آزمون فرض برای p هنگامی که n بزرگ است:

1)تشکیل فرض صفر H_1:$p=p_0$

2)تشکیل فرض مقابل $p \neq p_0$ یا $p>p_0$ یا H_1:$p<p_0$

3)انتخاب سطح تشخیص α

4)ناحیه بحرانی:

الف) برای $H_1: p < p_0$ $\quad z < -z_\alpha$

ب) برای $H_1: p > p_0$ $\quad z > z_\alpha$

ج) برای $H_1: p = p_0$ $\quad z > z_{\frac{\alpha}{2}}, z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

5) محاسبات: اگر z را از فرمول $z = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$ محاسبه می کنیم

6) نتیجه گیری: اگر z در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض H_0 را رد می کنیم.

مثال19. سکه ای را 900 بار پرتاب می کنیم، 490 بار شیر می آید. آیا سکه نا اریب است؟

$$\begin{cases} H_0: p = \dfrac{1}{2} \\ H_1: p \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

α=%5

$$z = \frac{490 - 900 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{900 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = 2.667$$

ناحیه پذیرش: $(-\infty, z_\alpha] = (-\infty, 1.64)$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال 20. فرض کنید سکه ای را 100 بار پرتاب می کنیم و 65 بار شیر آمده است. فرض سالم بودن سکه در کدام سطح رد می شود؟(α=0,025)

$$\begin{cases} H_1: p = \dfrac{1}{2} \\ H_1: p \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ ناحیه پذیرش } : \left[-z_{\frac{\alpha}{2}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_o}} = \frac{65 - 50}{5} = 3$$

ناحیه پذیرش: $\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1.96, 1.97]$

H_0 رد می شود یعنی سکه ناریب است.

مثال21. یک شرکت تولید ادعا می کند که تنها 5 درصد تولیدات او ممکن است معیـوب باشـد. از 400 نمونه ای که از این شرکت خریداری کردیم 30 عدد معیوب بود. آیا می توان ادعای شـرکت را قبول کرد؟ α=%5

$$\begin{cases} H_0: p = 0.05 \\ H_1: p > 0.05 \end{cases} \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{30}{400} = 0.075$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = (0.05 - 0.075) / \sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{400}} = 2.29$$

ناحیه پذیرش: $(-\infty, z_\alpha] = (-\infty, 1.64)$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

13-4. آزمون تفاضل نسبتها در دو جامعه

یعنی مواقع علاقمند به تست تساوی دو نسبت هستیم. یعنی می خواهیم فرضیه خنثی $H_0=P_1=p_2=p$ را در مقابل فرض $H_1: p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم. که پارامترهای p_1 و p_2 عبارت از نسبت مورد تحقیق در دو جمعیت است.

از دو جامعه بترتیب دو نمونه مستقل به حجم های n_1 و n_2 انتخاب می کنیم ونسبت های موفقیت $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ را از دو فرمول زیر حساب می کنیم:

$$\hat{p}_1=\frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2=\frac{x_2}{n_2}$$

که د رآن x_1 و x_2 بترتیب تعداد موفقیت در دو جامعه اند.

می دانیم که متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد است. در صورتیکه H_0 درست باشد:

$$z=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}$$

و n_1 و n_2 اعداد بزرگی هستند.

با ادغام دو نمونه با هم یک برآورد نا اریب برای p (نسبت مشترک دو جامعه تحت فرض H_0) بدست می آید:

$$\hat{p}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$$

که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت در هر یک از دو نمونه می باشند.

در اینصورت مقدار z بصورت زیر خواهد بود:

$$z=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

که در آن $\hat{q}=1-\hat{p}$ است.

بطور خلاصه: برای تست تساوی دونسبت در حالت بزرگ بودن نمونه ها، 6 مرحله زیر انجام می شود:

1)تشکیل فرض H_0 $H_0: p_1=p_2=p$

2)تشکیل فرض مقابل $p_1 \neq p_2$ یا $p_1>p_2$ یا $H_1: p_1<p_2$

3)انتخاب سطح تشخیص α

4)ناحیه بحرانی

الف) برای $p_1<p_2$ $z<-z_\alpha$

ب)برای $p_1<p_2$ $z>z_\alpha$

ج)برای $p_1 \neq p_2$ $z<-z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $z>z_{\frac{\alpha}{2}}$

5)محاسبات: مقادیر $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ و $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ و $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ را محاسبه نموده و سپس عبارت زیر را بیابید:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

6)نتیجه گیری: اگر z داخل ناحیه بحرانی قرار گرفت، H_0 رد می شود.

مثال22. در شهر A از هر 1000 نفر 450 نفر مشتری یک نوع چای بخصوصی هستند. و در شهر B از هر 800 نفر 40 نفر مشتری این نوع چای بودند. آیا می توان گفت مردم در هر دو شهر بیک اندازه علاقمند به این نوع چای هستند؟(خطای نوع اول را ده درصد در نظر بگیرید)

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 = p \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{450}{1000} = 0.45$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{450 + 400}{1000 + 800} = 0.47$$

$$\hat{q} = 1 - 0.47 = 0.53$$

$$z = \frac{0.45 - 0.5}{\sqrt{0.47 \times 0.53\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{800}\right)}} = -2.08$$

ناحیه پذیرش: $\left[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right] = (-1.645, 1.645)$

فرض H_0 رد می شود.

مثال23. قبل از برقراری قانون مالک و مستاجر از 500 نفر 400 نفر از مستاجرین با صاحب خانه مسأله نداشتند. پس از آن از هر 600 نفر 400 نفر مسأله ای نداشتند. آیا می توان گفت که برقراری قانون موجب افزایش اختلاف شده است؟(خطای نوع اول را 5درصد در نظر بگیرید)

$$\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{400}{500} = 0.8 \qquad , \qquad \hat{p}_2 = \frac{400}{600} = 0.67$$

$$\hat{p} = \frac{400+400}{500+600} = \frac{8}{11} \qquad , \qquad \hat{q} = 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$$

$$z = \frac{0.8 - 0.67}{\sqrt{\frac{8}{11} \times \frac{3}{11}\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{600}\right)}} = 4.81$$

ناحیه پذیرش: $[z_\alpha, +\infty] = [1.645, +\infty]$

مثال 24. در یک بیمارستان از 956 نوزاد 52/5 درصد پسر بودند در حالیکه وقتی نوزادان 2 بیمارستان را در نظر گرفتیم از 1406 نوزاد 0/4960 درصد پسر بودند. آیا اختلاف معنی داری در مورد نسبت نوزادان پسر در دو بیمارستان وجود دارد؟

$$n_1 = 956$$

$$n_1 + n_2 = 1406 \Rightarrow n_2 = 450$$

$$\hat{p}_1 = 0.525$$

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow 0.496 = \frac{956 \times 0.525 + 450\hat{p}_2}{1406} \Rightarrow \hat{p}_2 = 0.434$$

$$\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$z = \frac{0.525 - 0.434}{\sqrt{0.496 \times 0.504\left(\frac{1}{956} + \frac{1}{450}\right)}} = 3.37$$

ناحیه پذیرش: $[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}] = (-1.645, 1.645)$

بنابراین فرضیه صفر رد می شود.

14-4. آزمون های مربوط به تفاضل های بین k نسبت

هدف این آزمون ها این است که باید تصمیم بگیریم که آیا تفاضل هایی که بین نسبتهای نمونه ای (یا درصدها) مشاهده می شوند معنی دار هستند یا اینکه آنها را می توان معلول تصادف دانست. برای اشاره به یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که $x_1,x_2,\ldots,z_k$ مقادیر مشاهده شده مجموعه ای از متغیرهای تصادفی مستقل $x_1,x_2,\ldots,z_k$ باشند که دارای توزیع های دو جمله ای با پارامترهای مربوط $(n_1,\theta_1),\ldots,(n_k,\theta_x)$ هستند اگر n ها بقدر کافی بزرگ باشند می توانیم توزیع های متغیر تصادفی مستقل را با توزیع های نرمال استاندارد تقریب کنیم.

$$z_i=\frac{x_i-n_i\theta_i}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}};i=1,\ldots,k$$

و با توجه به اینکه اگر x~z داشته باشد آنگاه $x^2\sim\chi^2_{(1)}$ دارد، می توانیم

$$\chi^2_{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-n_i\theta_i)^2}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}}$$

را بعنوان مقداری از یک متغیر تصادفی که توزیع فی دوبا k درجه آزادی دارد تلقی کنیم.

بنابراین برای آزمون فرض

$$\begin{cases}H_0:\theta_1=\theta_2=\ldots.=\theta_k=\theta_0\\ H_1:\ \text{حداقل یکی از } \theta \text{ها برابر } \theta_0 \text{ نیست}\end{cases}$$

می توانیم از ناحیه بحرانی $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha,k}$ استفاده کنیم که د رآن است

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-n_i\theta_0)^2}{n_i\theta_0(1-\theta_0)}$$

وقتی θ_0 معین نیست، یعنی وقتی توجه ما تنها به فرض صفر $\theta_1=\theta_2\ldots=\theta_k$ است، به جای θ برآورد ادغام شده را قرار می دهیم و ناحیه بحرانی بصورت $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha,k-1}$ در می آید که در آن از بین رفتن یک درجه آزادی یعنی تغییر در ناحیه بحرانی از $\chi^2_{\alpha,k}$ به $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha,k-1}$ ناشی از این واقعیت است که به جای پارامتر نامعلوم θ، برآورد آن قرار داده شده است.

با مرتب کردن داده ها بصورت جدول زیر:

	پیروزی ها	شکستها
نمونه 1	x_1	n_1-x_1
نمونه 2	x_1	n_2-x_2

درایه های آنرا فراوانی های خانه ای مشاهده شدهٔ f_i می نامیم که در آن اولین اندیس نشانه سطر و دومین اندیس نشانه ستون این جدول k×2 است.

تحت فرض $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_k=\theta_0$ امید فراوانیهای خانه ای مشاهده شده برای اولین ستون به ازای k و ...وI=1 بصورت: $e_{i1}=n_i\hat{\theta},e_{i2}=n_i(1-\hat{\theta})$ برآورد می کنیم.

مقدار آماره χ^2 بصورت زیر است:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{2}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

مثال25. برمبنای داده های نمونه ای که در جدول زیر نشان داده شده تعین کنید که نسبت واقعی مشتریانی که ماده پاک کننده را به ماده پاک کننده B ترجیح می دهند در هر سه شهر یکسان است یا نه α=0/05

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ H_1 : \text{نادرست} \quad H_o \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{232 + 260 + 197}{400 + 500 + 400} = 0.53$$

$\chi^2 \geq \chi^2_{0.05,2} = 5.991$ ناحیه بحرانی

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

$$e_{11} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{12}\, 400 \times 0.47 = 188$$

$$e_{21} = 500 \times 0.53 = 265 \quad e_{22} = 500 \times 0.47 = 235$$

$$e_{31} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{32} = 400 \times 0.47 = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(232 - 212)^2}{212} + \frac{(260 - 265)^2}{265} + \frac{(197 - 212)^2}{212} + \frac{(168 - 188)^2}{188} + \frac{(240 - 235)^2}{235}$$

$+\dfrac{(203 - 188)^2}{188} = 6.48 \Rightarrow$ H_0رد می شود

15-4. آزمون استقلال

آماره آزمون عبارتست از

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که داری توزیع مربع کای با(c-1) و (r-1) درجه آزادی است.

که در آن مجموع روی تمام عناصر جدول r×c بعدی جدول توافقی است محاسبه می شود.

اگر $\chi^2_{(2-1)(c-1)} > \chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)}$ باشد در اینصورت فرضیه H_0 را مبنی بر استقلال متغیرها در سطح α رد می شود.

مثال26. برای بررسی ارتباط بین گرایش مذهبی و منطقه جغرافیایی آزمایشی به شرح زیر انجام شده:

2 گروه از مردم بطور تصادفی انتخاب شده اند، یک گروه از ناحیه شمال و گروه دیگر از ناحیه جنوب و هر شخص متعلق به یکی از 3 گروه شیعه، سنی و سایر مذاهب خواهد بود. فراوانی های ملاحظه شده در جدول زیر داده شده است:

	نوع مذهب			
منطقه جغرافیایی	شیعه	سنی	سایرین	جمع
شمال	$182_{(202)}$	$215_{(112)}$	$203_{(187)}$	600
جنوب	$154_{(136)}$	$136_{(140)}$	$110_{(140)}$	400
جمع	336	351	313	1000

در سطح α=0/05 آیا عقاید مذهبی و ناحیه ای که فرد زندگی می کند مستقل از یکدیگرند؟

A_1= فرد انتخابی از قسمت شمال باشد.

A_2=فرد انتخابی از قسمت جنوب باشد.

B_1= فرد انتخابی از مذهب شیعه باشد.

B_2=فرد انتخابی از مدهب سنی باشد.

B_3=فرد انتخابی از سایر مذاهب باشد. استقلال رابطه منطقه جغرافیایی و نوع مذهب: H_0

H_1: H_0 درست نیست

$$= \frac{600}{1000} \times \frac{436}{1000}$$

تعدادی که ما انتظار داریم در صورتیکه H_0 درست باشد $202 = (1000)\left(\frac{336}{1000}\right)\left(\frac{600}{1000}\right) =$ تعداد افرادی که هم شمالی و هم شیعه هستند.

$$p(A_1 \cap B_2) = p(A_1)p(B_2) = \frac{600}{100} \times \frac{351}{1000}$$

$$n = \left(\frac{600}{1000}\right)\left(\frac{351}{1000}\right)(1000) = 211$$

به همین ترتیب برای بقیه محاسبه می شود.

$$\chi^2_{(2-1)(3-1)} = \frac{(182-202)^2}{202} + \frac{(215-211)^2}{211} + \frac{(203-187)^2}{187} + \frac{(154-134)^2}{134} + \frac{(136-140)^2}{140} + \frac{(110-126)^2}{126}$$

$$= 8.556$$

$$\chi^2_{0.05,2} = 5.991$$

چون 5/991<8/556 است پس فرضیه H_0 رد می شود.

تذکر 1: برای تست استقلال برای این فرضیه که k جمعیت ببینیم دارای یک پارامتر p باشند یعنی

برای انجام آزمون

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 = \ldots = P_k = P \\ H_1 : \ H_o \text{ is not true} \end{cases}$$

از آماره مربع کای استفاده می شود.

برای تشکیل چنین تستی نمونه های تصادفی $n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots, n_k$ تایی از k جمعیت انتخاب نموده و آنها را در یک جدول توافقی 2×k نظیر جدول زیر مرتب می کنیم.

	نمونه		
	1	...	k
موفقیت	x_1	...	x_k
عدم موفقیت	$n_1 - x_1$	...	$n_k - x_k$

مقادیر انتظاری را نیز طبق مسئله قبل محاسبه می نمائیم و بالاخره مقادیر ملاحظه شده و انتظاری را در فرمول آماره مربع کای زیر قرار می دهیم:

$$\chi^2_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

اگر $\chi^2_{(k-1)} > \chi^2_{\alpha;k-1}$ باشد فرضیه H_0 رد می شود.

مثال27. یک نمونه تصادفی از 30 نفر بزرگسال برحسب جنس و تعداد ساعتی که در هفته تلویزیون تماشا می کنند دسته بندی شده اند:

	مرد	زن
بالای 25 سال	6/53 5	7/46 9
زیر 25 سال	7/46 9	8/53 7

با استفاده از سطح 0/01 فرضیه استقلال بین جنس و مدت زمان تماشای تلویزیون را تست نمائید.

$$\chi^2_{(1)} = \frac{\left(\left|5-6.53\right|-0.5\right)^2}{6.53} + \frac{\left(\left|9-7.46\right|-0.5\right)^2}{7.46} + \frac{\left(\left|9-7.46\right|-0.5\right)^2}{7.46} + \frac{\left(\left|7-8.53\right|-0.5\right)^2}{8.53} =$$

0.5768

$$\chi^2_{0.01,1} = 6.635$$

H_0 رد نمی شود.

16-4. آزمون درستی انطباق

آزمون درستی انطباق، بین فراوانی های ملاحظه شده و انتظاری براساس کمیت ذیل است:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$$

که دارای توزیع مربع کای است.

O_i مقادیر ملاحظه شده و e_i مقادیر انتظاری در سلول i ام است.

اگر $\chi^2>\chi^2_{\alpha-1-k}$ باشد، فرض H_0 را رد می کنیم.

تعداد پارامترهای تخمین زده شده از روی داده ها – 1- تعداد سلول ها= درجه آزادی توزیع مربع کای

مثال28. یک تاس 120 مرتبه انداخته می شود و نتایج زیر به دست آمده است:

x	1	2	3	4	5	6
f	20	22	17	18	19	24
انتظاری	20	20	20	20	20	20

آیا این تاس سالم است؟ α=0/05

$$\begin{cases}H_0: P(x=i)=\frac{1}{6}\\ H_0: P(x=i)\neq\frac{1}{6}\end{cases}$$

اگر تاس سالم باشد، انتظار خواهیم داشت که هر یک از اعداد 1 تا 6 را 20 بار نشان دهد.

$$\chi^2_{(15)}=\frac{(20-20)^2}{20}+\frac{(22-20)^2}{20}+\frac{(17-20)^2}{20}+\frac{(18-20)^2}{20}+\frac{(19-20)^2}{20}+\frac{(24-20)}{20}$$

$$=1.7$$

$$\chi^2_{0.05,5}=11.07$$

چون 1/7<11/07 است پس H_0 پذیرفته می شود و نتیجه می گیریم توزیع یکنواخت است و تاس سالم است.

مثال29. فرض کنید طول عمر 40 باطری از توزیع نرمال پیروی می کند. فراوانی مشاهده شده برای هر طبقه داده شده است طول عمر 40 باطری دارای حد متوسط $\bar{x}$ =3/4125 و انحراف معیار S =0/703 است. در سطح α=0/05 آیا طول عمر باطری ها از توزیع نرمال پیروی می کند یا خیر؟

چون بعضی از مقادیر مشاهده شده و انتظاری از 5 کمتر هستند در هم ادغام شده اند.

حدود طبقه ها		o_i	e_i	
1/45-1/95		2	0/6	
1/95-2/45	7	1	2/7	10/1
2/45-1/95		4	6/8	
2/95-3/45		15	10/6	
3/45-3/95		10	10/3	
3/95-4/45		5	6/1	
4/45-4/95		3	2/2	

$$P(1.45<x<1.95)=P\left(\frac{1.45-3.4125}{0.703}\right)<Z<\left(\frac{1.95-3.4125}{0.703}\right)=0.015\rightarrow e_i=0.015\times 40=0.6$$

8   8/3

$$P(2.95<x<3.45)=P\left(\frac{2.95-3.4125}{0.703}\right)<Z\left(\frac{5-3.4125}{0.703}\right)=$$

$$P(4.45<x<3.95)=P\left(\frac{4.45-3.4125}{0.703}\right)<Z<\left(\frac{4.95-3.4125}{0.703}\right)=$$

$$n(1.45<x<1.95)=$$

$$n(2.95<x<3.45)=(0.2659)(40)=10.6$$

$$n(4.45<x<4.95)=$$

درجه آزادی =4-3=1

$$\chi^2_{(1)}=\frac{(|7-10.1|-0.5)^2}{10.1}+\frac{(|15-10.6|-0.5)^2}{10.6}+\frac{(|10-10.3|-0.5)^2}{10.2}+\frac{(|8-8.3|-0.5)^2}{10.3}=$$

2.1129

$$\chi^2_{0.05,1}=3.841$$

H_0 رد نمی شود.

مثال30. از 1000 خانواده که دارای 5 بچه هستند تعداد دخترها مطابق جدول زیر به دست آمده است:

دختر	0	1	2	3	4	5
فراوانی	38	144	342	287	164	25

آیا این تولدها از توزیع دو جمله ای پیروی می کند؟

$$\mu = \frac{x_i}{n} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

$$P = \frac{\mu}{n} = \frac{2.47}{5} = 0.494$$

$$P(x = x) = \binom{5}{0}(0.494)^x (0.506)^{5-x}$$

$$P(x = 0) = \binom{5}{0}(0.494)^0 (0.506)^5 0.03317$$

$$n = (x = 0) = (0.03317)(1000) = 33.2$$

o_i	38	144	342	287	164	25
ei	33/2	161/9	316/2	308/7	150/7	29/4

$$\chi^2_{(25)} = \frac{(38-33.2)^2}{2} + \frac{(31-30)^2}{30} + \frac{(55-60)^2}{60} + \frac{(25-20)^2}{20} = 2.2$$

$$\chi^2_{(2)} = \frac{(32-32.2)^2}{32.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7}$$

$$+ \frac{(25-201.4)^2}{29.4} = 7.54$$

$$\chi^2_{0.05,5} = 11.07$$

H_0 قبول می شود.