3-1- مقدمه

نوع دیگر برآورد، برآورد فاصله ای به شکل $[C_1,C_2]$ است که در آن C_1 حد پائین و C_2 حد بالا است بنابراین اگر پارامتری که باید برآورد کرده شود با θ معرفی شود، $[C_1,C_2]$ یک برآورد کنندهٔ فاصله ای θ است به طوری که با احتمال مفروض، $1-\alpha$، $C_1 \le \theta \le C_2$ باشد. C_2,C_1 حدود اطمینان پارامتر مفروض و فاصله بین آنها یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ نامیده می شود. به کسر $(1-\alpha)$ اغلب ضریب اطمینان گفته می شود.

3-2- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار معلوم باشد

فرض کنید متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال $N(\mu,\sigma)$ است. یک نمونه تصادفی n تـایی از ایـن جامعه گرفته می‌شود. اگر $\bar{x}$ میانگین نمونه باشد در نتیجه $\bar{x} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ است. در ایـن‌صـورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ به صورت ذیل تعیین می‌شود:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

یعنی:

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

و طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$2z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

در نهایت فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از:

$$p(z \ge -z_\alpha)=1-\alpha \qquad p(z \le z_\alpha)=1-\alpha$$
$$p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha\right\}=1-\alpha \qquad p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha\right\}=1-\alpha$$
$$\mu \le \bar{x}+z_\alpha\sigma/\sqrt{n} \qquad \mu \ge \bar{x}-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$$

مثال1. میانگین نمونهٔ یک نمونه تصادفی 100 تایی از موشک‌های انبار شده 2208 شده است. انحراف معیار معلوم و مساوی 40 است. برای میانگین واقعی یک فاصله اطمینان 0/99 پیدا کنید.

$$p\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$
$$2208-z_{.005}40.10 \le \mu \le 2208+z_{.005}40.10$$

مثال2. متغیر تصادفی x توزیع نرمال با میانگین مجهول μ دارد. یک فاصله اطمینان 95 درصد بصورت [7/12و 3/72] برای μ ارائه شده است. بدین ترتیب، مقدار بدست آمده برای میانگین نمونه چقدر است؟

$$\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}=7.12$$
$$\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}=3.72$$
$$2\bar{x}=10.84 \Rightarrow \bar{x}=5.42$$

تذکر: بنا به قضیه حد مرکزی، فاصله اطمینان فوق را در صورتی که $n \ge 30$ باشد، می‌توان در مورد جامعه‌های غیر نرمال نیز به کار برد و در زمانی که σ نامعلوم است به جای σ ، مقدار انحراف معیار نمونه ای s را قرار می دهیم.

3-3- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار مجهول باشد

فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار (مجهول) σ باشد. یک نمونه تصادفی n تایی گرفته و فرض کنید $\bar{x}$ میانگین نمونه و S انحراف معیار نمونه باشد. در این صورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = t_{(n-1)}$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \le t_{(n-1)} \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{x-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

بعبارت دیگر:

$$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$2t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه برای μ:

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \le t_{n-1}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left(t_{n-1} \le t_{\alpha}\right)$$

$$p\left\{-t_{\alpha,n-1} \le \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\mu \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\mu \le \overline{x} - t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mu \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n} \qquad \mu \ge \overline{x} - t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}$$

مثال3. برای مدت چندین سال یک امتحان قوه ریاضی برای همه دانشجویان تازه وارد دانشگاهی ترتیب داده شده است. اگر برای 64 دانشجو که تصادف در این مدت زمان انتخاب شده اند متوسط زمانی که صرف جواب دادن به این امتحان کرده اند 28/5 دقیقه و واریانس زمانها 9/3 دقیقه باشد یک فاصله اطمینان 99% برای متوسط واقعی زمانی که یک دانشجویی سال اول صرف این امتحان می کند بسازید:

$$n = 64$$

$$\overline{x} = 28.5 \qquad \overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$s^2 = 9.3 \qquad 28.5 - t_{0.005}\sqrt{9.3}/8 < \mu < 28.5 + t_{0.005}\sqrt{9.3}/8$$

$$\alpha = 0.01$$

مثال4. طول جمجمه های اسکلت فسیل شده نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است دارای میانگین 5/68cm و انحراف معیار 0/29cm است. با فرض اینکه چنین اندازه هایی بطور نرمال توزیع شده اند. یک فاصله اطمینان 95% برای طول میانگین این نوع پرندگان پیدا کنید.

$$\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$5.68 - t_{0.025} 0.29/\sqrt{10} < \mu < 5.68 + t_{0.025}(0/29)/\sqrt{10}$$

$$5.68 - (2.262)\frac{0.29}{3.016} < \mu < 5/68 + (2.262)\frac{0.29}{3.16}$$

$$5.4724 < \mu < 5.8875$$

4-3- فاصله اطمینان برای انحراف معیار یک توزیع نرمال که μ آن مجهول است

فرض کنید متغیر تصادفی x داری توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار مجهول σ است. یک نمونه تصادفی n تایی را در نظر بگیرید. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = x^2_{(n-1)}$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \chi^2_{(n-1)} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \chi\frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 برابر است با:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

و برای σ برابراست با:

$$s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} \le \sigma \le s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از:

$$p\{\chi^2_{1-\alpha,n-1} \le \chi^2_{(n-1)}\} = 1-\alpha \qquad \{\chi^2_{(n-1)} \le \chi^2_{\alpha,n-1}\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\alpha,n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le x^2_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\alpha,n-1}} \qquad \sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}$$

$$\sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{x^2_{1-\alpha,n-1}}} \qquad \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{x^2_{\alpha,n-1}}}$$

مثال5. قطر کامل شدهٔ کابل مسلح برق، دارای توزیع نرمال است. یک نمونه 20 تایی، دارای میانگین 0,79 و انحراف معیار 0,01 می دهد. یک فاصله اطمینان 95% برای σ پیدا کنید.

$$\frac{(n-1)s^2}{x^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

$$\frac{19(0.0001)}{32.85} < \sigma^2 < \frac{19(0.0001)}{8.9}$$

3-5- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار در هر دو جامعه معلوم باشند

فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار معلوم σ_x و y یک متغیر تصادفی مستقل از x دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار معلوم σ_y باشد. فرض کنید $\bar{x}$ معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_x تایی از x و $\bar{y}$ معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_y تایی از y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x-\mu_y$ عبارتست از:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}=z$$

$$P\{-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2}\le\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\le Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{x}-\bar{y}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\le\mu_x-\mu_y\le\bar{x}-\bar{y}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right\}=1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ به صورت زیر است:

$$\bar{x}-\bar{y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}+Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}-Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

مثال6. به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می شود. ده قطعه زمین شخم کم عمق و پانزده قطعه شخم عمیق زده می شوند. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب 40/8 تن و میانگین گروه دوم 44/7 است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل 0/6 تن و انحراف معیار شخم عمیق 0/8 باشد. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

$$\bar{x}-\bar{y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

$$40.8-44.7\pm Z_{\%5}\sqrt{\frac{0.36}{10}+\frac{0.64}{15}}$$

مثال7. از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر V بار از کارافتادگی های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه و انحراف معیار دستگاه اول 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه و انحراف معیار دستگاه دوم 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

تذکر: می توان به کمک قضیه حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه های تصادفی از جامعه های غیرنرمال با واریانس های معلوم δ_1^2 و δ_2^2 نیز به کاربرد مشروط بر اینکه $n_1, n_2 \geq 30$ باشند.

نکته: برای ساختن یک فاصله اطمینان $\%100(1-\alpha)$ برای $\mu_1-\mu_2$ موقعی که σ_1 و σ_2 نامعلوم باشند ولی $n_1, n_2 > 30$ باشند به جای σ_1 و σ_2 مقادیر انحراف معیارهای نمونه ای S_1 و S_2 را قرار می دهیم و مانند قبل عمل می کنیم.

6-3- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه هر دو انحراف معیار مجهول

ولی مساوی و $n_y \le 30$ باشند: فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار مجهول σ باشد. فرض کنید $\bar{x}$ میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و $\bar{y}$ میانگین یک نمونه تصادفی متشکل n_y مشاهده از y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x - \mu_y$ به صورت:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x-n_y-2}}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}}=t_{n_x+n_y-2}$$

n_x و n_y نیز کوچک هستند. $n_x, n_y \le 30$

$$P\left(-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2} \le t_{n_x+n_y-2} \le t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\right)=1-\alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2} \le \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} \le t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}} \le\right.$$

$$\mu_x-\mu_y \le \bar{x}+\bar{y}+t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}=1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

و یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

ارائه می شود.

مثال 8. مطالعه از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر 60 بار از کارافتـادگی هـای دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه با انحراف معیار 19/4 دقیقه بوده است و زمـان تعمیـر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه با انحراف معیار 18/8 دقیقه بـوده اسـت. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیـر از کارافتـادگی هـای دو دسـتگاه فتوکپی پیدا کنید.

$n_1=60 \qquad n_2=60$

$\bar{x}_1=80.7 \qquad \bar{x}_2=88.1$

$S_1=19.4 \qquad S_2=18.8$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(80.7-88.1)-Z_{0.05}\sqrt{\frac{(19.4)^2}{60}-\frac{(18.8)^2}{60}}<\mu_1-\mu_2<(80.7-88.1)+Z_{0.05}\sqrt{\frac{(19.4)^2}{60}-\frac{(18.8)^2}{60}}$$

مثال 9. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شـده انـد دارای میـانگین ارتفـاع 13/8 با انحراف معیار 1/2 و پانزده درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. با فرض اینکه نمونه های تصادفی از جامعـه هـای نرمـال بـا واریانسهای برابر انتخاب شده اند یک فاصله اطمینان 95% برای تفاضل‌های ارتفـاع دو نـوع درخـت مرکب پیدا کنید.

$$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}=$$

$$13.8-12.9\pm t_{0.025;26}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}}\sqrt{\frac{11\times(1.2)^2+14(1.5)^2}{26}}=0.9\pm 2.056(0.3873)(1.35)$$

$$-0.198<\mu_1-\mu_2<1.998$$

7-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1-\mu_2$ نمونه های کوچک در حالتی که $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ و مجهول هستند

حال فرض کنید که مساله پیدا کردن یک فاصله اطمینان جهت $\mu_1-\mu_2$ برای نمونه های کوچکی باشد که پراش جمعیت‌های آنها مساوی نبوده به علاوه این امکان هم وجود ندارد که نمونه ها را با اندازه های مساوی اختیار نمائیم.

آماره ای که در چنین حالت بکار گرفته می شود غالباً بصورت زیر است:

$$T' = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

که تقریباً دارای توزیع t با v درجه آزادی خواهد بود که v از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}\right]+\left[\frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}\right]}$$

از آنجا که مقدار v فوق به ندرت عدد صحیح می‌شود لذا آنرا به نزدیکترین عدد صحیح گرد می‌کنیم.

با استفاده از آماره T' می توان نوشت:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T' < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_1-\mu_2$ بصورت زیر است:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

که در آن $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ و S_1^2 و S_2^2 به ترتیب میانگین و پراش نمونه های کوچک به اندازه های n_1 و n_2 هستند که از جمعیتهای تقریباً نرمال اختیار می شوند.

محاسبه خطا در برآورد μ بوسیله $\bar{x}$ (محاسبه خطای ماکزیمم برآورد)

اگر در فرمول: $\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}<\mu<\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

از طرفین نامساوی، $\bar{x}$ را کم کنیم داریم: $-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}<\mu-\bar{x}<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

و یا $|\mu-\bar{x}|<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

فرمول فوق نشان می دهد که اگر از $\bar{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شود بـا $100(1-\alpha)\%$ اطمینـان می توان گفت که اختلاف مقدار واقعی μ و مقدار برآوردگر از مقدار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$ کمتر اسـت. و قـضیه زیر را می توان بیان نمود.

قضیه: اگر از $\bar{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شـود بـا $100(1-\alpha)\%$ اطمینـان مـی تـوان گفـت کـه حداکثر خطا برابر است با:

$$e=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$$

تذکر: با توجه به مقدار e داریم L=2e. به عبارت دیگر طول فاصـله اطمینـان بـا e نـسبت مـستقیم دارد.

8-3- محاسبه اندازه نمونه

اگر از $\overline{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شود با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان می توان گفت خطا کمتر از مقدار e است اگر حجم نمونه را از فرمول زیر بدست آوریم:

$$n=\left(\frac{\sigma}{e}Z_{\alpha/2}\right)^2$$

تذکر: از فرمول فوق می توان استفاده کرد که σ معلوم باشد. اگر σ معلوم نباشد ابتدا نمونه ای با حجم $n\geq 30$ انتخاب و مقدار S را محاسبه می کنیم و در فرمول فوق به جای σ از S استفاده می کنیم.

محاسبه خطای ماکزیمم برآورد در صورتیکه σ مجهول باشد و $n<30$ باشد:

$$\overline{x}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{x}+t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu-\overline{x}<t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$|\mu-\overline{x}|<t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$e=\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}$$
$$n=(\frac{S}{e}t_{\alpha/2})^2$$

مثال10. یک مهندس علاقمند به استفاده از نمونه تصادفی به اندازه n=150 برای برآورد متوسط شایستگی مکانیکی کارگران خط مونتاژ در یک صنعت بزرگ می باشد. اگر بر اساس تجربه، مهندس بتواند برای داده ها $\sigma=6.2$ را فرض کند، او با احتمال 99% درباره اندازه ماکزیمم خطایش چه ادعایی بکند.

$$\alpha=0.01$$

$$e=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}=\frac{6.2}{\sqrt{150}}\times 2.575=1.3$$

مثال11. یک کارگر محقق می خواهد متوسط زمانی که یک مکانیک صرف بازدید چرخهای یک ماشین می کند تعیین کند، همین طور بتواند با اطمینان 95% ادعا کند که متوسط نمونه اش به

اندازه 0/5 دقیقه انحراف دارد. اگر از تجربه گذشته اش σ=1.6 فرض کنید. اندازه نمونه را چقدر باید انتخاب کند؟

$$n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 = \left(\frac{1.6 \times 1.96}{0.5}\right)^2 = 39.6 \approx 40$$

مثال12. در 6 بار تعیین نقطه ذوب قلع، میانگین 232/26°C با انحراف معیار 0/14 به دست آمده است. اگر این میانگین را به عنوان نقطه ذوب واقعی قلع به کار برود درباره خطای ماکزیمم با اطمینان 98% چه ادعایی می توان کرد؟

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} = \frac{0.14}{\sqrt{6}} t_{0.01} = 0.19$$

می توان با اطمینان 98% ادعا کرد که طرح برای نقطه ذوب قلع حداکثر 0/19 درجه منحرف است.

9-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$

در این حالت نمونه ها مستقل از یکدیگر نبوده و پراش های دو جمعیت لزوماً مساوی نیستند. این در صورتی درست خواهد بود که ملاحظات در دو نمونه بصورت زوجی صورت پذیرد بطوریکه دو ملاحظه نیز به یکدیگر مربوط باشند.

به عنوان مثال، اگر آزمایشی را بر روی روش جدیدی در مورد رژیم گرفتن روی n فرد انجام دهید، وزن های قبل و بعد تکمیل تست، نمونه های ما را تشکیل می دهند. ملاحظات در دو نمونه که بر روی یک فرد انجام می پذیرد به یکدیگر مرتبط بوده و از این رو یک جفت را ایجاد می کند. برای تعیین اینکه رژیم گرفتن موثر است یا خیر ما باید اختلاف های d_i از ملاحظات دوتایی را بدست آوریم. این اختلاف ها مقادیری از متغیرهای تصادفی نمونه $d_1, d_2, ..., d_n$ از جمعیتی هستند که ما فرض می کنیم دارای توزیع نرمال با حد متوسط μ_D و پراش مجهول σ_D^2 باشند. ما σ_D^2 را با S_d^2 یعنی پراش اختلافهایی که نمونه ها را می سازند تخمین می زنیم. در نتیجه S_d^2 مقداری از آماره S_d^2 است که از نمونه ای به نمونه دیگر نوسان می کند. تخمین نقطه ای $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$ به توسط $\bar{d}$ داده می شود.

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر نوشته می شود:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right)$$

که در آن آماره:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_d / \sqrt{n}}$$

دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر است:

$$\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

که در آن $\bar{d}$ و S_d میانگین و انحراف معیار اختلاف n جفت اندازه گیری است.

مثال13. تعداد 20 دانشجوی سال اول را به 10 جفت تقسیم می کنیم. هر عضوی از این جفت تقریباً دارای یک بهره هوشی هستند. از هر زوجی یکی بطور تصادفی انتخاب شده و به این گروه یک درس ریاضی به فرم ارائه کنفرانس آموخته شد. به اعضاء باقیمانده این جفتها عین همان درس بصورت تدریس معمولی توسط یک استادیار داده شد. در پایان ترم به هر دو گروه یک امتحان داده و نتایج زیر حاصل گشت. فاصله اطمینان 98% را برای اختلاف واقعی دو روش تدریس بدست آورید.

جفت	تدریس بصورت کنفرانس	روش معمولی	D_i
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

تخمین نقطه ای μ_D به توسط $\bar{d}=1.6$ داده می شود. پراش S_d^2 اختلاف نمونه بصورت زیر است:

$$S_d^2=\frac{n\sum d_i^2-\left(\sum d_i^2\right)}{n(n-1)}=40.7$$

$$S_d=6.38$$

$$t_{\%1,9}=2.821$$

$$-7.29<\mu_D<4.09$$

3-10- فاصله اطمینان برای نسبت انحراف معیارهای دو توزیع نرمال

فرض کنید که x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار δ_x و y یک متغیر تصادفی مستقل از x دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y باشد. فرض کنید S_x^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و S_y^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_y مشاهده از y باشد، فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ به صورت :

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}=F_{n_x-1,n_y-1}$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\le F_{n_x-1,n_y-1}\le F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\le \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\le F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{S_x^2}{S_y^2\,F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\le \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\le \frac{S_x^2}{S_y^2\,F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\right\}=1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}},\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\right]$$

فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha;n_x-1,n_y-1}}\right]$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}\right]$$

ارائه می شود.

تذکر: فواصل فوق برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ به ترتیب بصورت زیر است:

$$\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}}\quad,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}}\quad\right]$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}}$$

مثال 14. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده اند دارای میـانگین ارتفـاع 13/9 با انحراف معیار 1/2 و 15 درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شـده انـد دارای میـانگین ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. یک فاصله اطمینان 98% برای نسبت واریانس های دو جامعه بسازید.

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}$$

$$\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2}\frac{1}{F_{0.01;11,14}}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2}\frac{1}{F_{0.99;11,14}}\rightarrow 0.165<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<2.752$$